Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

Mã môn học: 1001060 Thời gian : 75 phút(27/12/2014)
Đề thi gồm 3 trang Được phép sử dụng tài liệu
Mã đề: 0010.0111-0001-0010-2014-0001

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

(chọn 1 trong các câu: A, B, C, D)

Câu 1 Tập hợp nghiệm của phương trình $z^3 = 8e^{6-i6\pi}$ là

A) $\left\{2e^2, e^2(-1+i\sqrt{3}), e^2(-1-i\sqrt{3})\right\}$ B) $\varnothing$ C) $\left\{2e^2, e^2(1+i\sqrt{3})\right\}$ D) $\left\{2e^2, 2e^2(1+i\sqrt{3}), 2e^2(1-i\sqrt{3})\right\}$

Câu 2 Khẳng định nào sau đây **sai**?

A) $(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm i\sin n\varphi$, $\forall n\in Z$. B) Phương trình $e^Z = 2015.e^{-\pi i}$ vô nghiệm.

C) Cho hai số phức khác 0 là $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Khi đó : $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_2 = \varphi_1 \pm 2k\pi \end{cases}$

D) $[r(\cos\varphi \mp i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi \mp i\sin n\varphi)$, $\forall n\in Z$.

Câu 3 Khẳng định nào sao đây sai?

A) Hàm f(z) có đạo hàm trên toàn mặt phẳng phức khi và chỉ khi f(z) giải tích trong toàn mặt phẳng phức.

B) Hàm $f(z) = 6z + e^{5z}$ có đạo hàm trên toàn mặt phẳng phức nên giải tích trên toàn mặt phẳng phức.

C) $\oint\limits_{|z+4i|=2} \frac{6z+e^{5z}dz}{(z-1)^2} = 2\pi i(6+5e^5)$ D) $\oint\limits_{|z-2i|=6} \frac{6z+e^{5z}dz}{(z-1)^2} = 2\pi i(6+5e^5)$

Câu 4 Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) khả vi tại điểm $z = x_o+iy_o$ thì các hàm u(x,y) và v(x,y) thỏa điều kiện Cauchy – Reimann tại (x_o,y_o).

B) Nếu hàm v(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.

C) Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) liên tục tại điểm $z = x_o+iy_o$ thì các hàm u(x,y), v(x,y) cũng liên tục tại (x_o,y_o).

D) Nếu các hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên D.

Câu 5 Ảnh của đường thẳng $y = \frac{\pi}{8}$ qua phép biến hình $w = e^{-4z} = u + iv$ là

A) đường thẳng u = 0.
B) tia argw = -π/2.
C) tia argw = π/2.
D) đường thẳng v = 0.

Câu 6 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu khai triểm Laurent hàm f(z) quanh điểm bất thường cô lập a có dạng

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n \text{ thì } \operatorname{Res}[f(z),a] = a_{-1}$$

B) Hàm f(z)=(z+i) $\cos\frac{1}{z+i} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!}\frac{1}{(z+i)^{2n-1}}$ nên thặng dư $\operatorname{Res}\left[(z+i)\cos\frac{1}{z+i}, -i\right] = -\frac{1}{2}$.

C) f(z) = $z^3 e^{\frac{2}{z}} = z^3 + 2z^2 + 2z + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{z\ .4!} + \ldots$ và z = 0 là điểm bất thường cốt yếu của f(z).

D) $\oint\limits_{|z-1|=3} z^3 e^{\frac{2}{z}} dz = \oint\limits_{|z-1|=3} z^3 e^{\frac{2}{z}} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[z^3 e^{\frac{2}{z}}, 0\right] = \frac{4\pi}{3}$

Câu 7 Cho phương trình vi phân: y'-2y = u(t-π)$e^{t-\pi}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 27.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: pY-2Y = $\frac{e^{-\pi p}}{p-1} + 27$ (2)

Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\frac{e^{-\pi p}}{(p-1)(p-2)} + \frac{27}{p-2}$ (3)

Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $e^{-\pi p}\left(\frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1}\right) + \frac{27}{p-2}$

Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\left(e^{2(t-\pi)} - e^{t-\pi}\right)u(t-\pi) + 27e^{2t}$

A) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.
B) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
C) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
D) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 8 Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u = 3x^2 - 3y^2 - 8y$, $v = 6xy + 8x$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u, v là các hàm điều hòa liên hợp
B) u điều hòa, v không điều hòa.
C) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.
D) v điều hòa, u không điều hòa

Câu 9 Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}$[f(t-a)u(t-a)] = e^{-ap}F(p)

B) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{F(p)}{p}$

C) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\frac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

D) Nếu $f(t) = \begin{cases} 0 & khi \quad 0 < t < \pi \\ \sin 4t & khi \quad \pi < t < 2\pi \end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{2\pi} e^{-pt} \sin 4t dt$

Câu 10 Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p), $\mathscr{L}$[g(t)] = G(p) và a, b là các hằng số. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}$[af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p)

B) $\mathscr{L}[2 + t^2 + sh3t] = \frac{2}{p} + \frac{2}{p^3} + \frac{p}{p^2-9}$

C) $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4}{(p+2)(p^2+4)}\right] = 2e^{-2t} * \sin 2t$

D) $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{p-2}{p^2-4p+40}\right] = e^{2t}\cos 6t$

PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

Câu 11 (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

y'' - 6y' + 25y = $e^{-3t} - e^{2t}$, với y(0) = 0, y'(0) = 0

Câu 12 (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x'+3y = 2\sin t \\ x + y'+2y = e^t \end{cases}$$, với điều kiện x(0) = 0, y(0) = 0

<u>Câu 13</u> (*2 điểm*)

a) Tìm ảnh của hàm gốc: $f(t) = u(t-\pi)\cos(t-\pi) + 5t^2 \sin t + \int_0^t e^{-2u}\cos 5u\,du$

b) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân: $y(t) = e^{5t} + 2\int_0^t y(u)\cos(t-u)\,du$

*** Ghi chú :** *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

Ngày 25 tháng 12 năm 2014

Bộ môn duyệt

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM
BỘ MÔN TOÁN
MÔN THI: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE
Mã đề: 0010.0111-0001-0010-2014-0001
Giám thị 1: Giám thị 2:</td><td rowspan="2">Họ, tên sinh viên: ....
Mã số sinh viên:...............................
Số báo danh(STT):........ Phòng thi : ....
Ngày thi: 27/12/2014
Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.
Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Trả lời										

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

Mã môn học: 1001060 Thời gian : 75 phút(27/12/2014)
Đề thi gồm 3 trang Được phép sử dụng tài liệu
Mã đề: 0010.0111-0001-0010-2014-0010

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

(chọn 1 trong các câu: A, B, C, D)

Câu 1 Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u = 3x^2 - 3y^2 - 8y$, $v = 6xy + 8x$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u, v là các hàm điều hòa liên hợp
B) u điều hòa, v không điều hòa.
C) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.
D) v điều hòa, u không điều hòa

Câu 2 Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}$[f(t-a)u(t-a)] = e^{-ap}F(p)

B) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \dfrac{F(p)}{p}$

C) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

D) Nếu $f(t) = \begin{cases} 0 & khi \quad 0 < t < \pi \\ \sin 4t & khi \quad \pi < t < 2\pi \end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{2\pi} e^{-pt} \sin 4t dt$

Câu 3 Tập hợp nghiệm của phương trình $z^3 = 8e^{6-i6\pi}$ là

A) $\left\{2e^2, e^2(-1+i\sqrt{3}), e^2(-1-i\sqrt{3})\right\}$ B) $\varnothing$ C) $\left\{2e^2, e^2(1+i\sqrt{3})\right\}$ D) $\left\{2e^2, 2e^2(1+i\sqrt{3}), 2e^2(1-i\sqrt{3})\right\}$

Câu 4 Khẳng định nào sau đây **sai**?

A) $(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm i \sin n\varphi$, $\forall n \in Z$.

B) Phương trình $e^Z = 2015.e^{-\pi i}$ vô nghiệm.

C) Cho hai số phức khác 0 là $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Khi đó : $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_2 = \varphi_1 \pm 2k\pi \end{cases}$

D) $[r(\cos\varphi \mp i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi \mp i \sin n\varphi)$, $\forall n \in Z$.

Câu 5 Khẳng định nào sao đây sai?

A) Hàm f(z) có đạo hàm trên toàn mặt phẳng phức khi và chỉ khi f(z) giải tích trong toàn mặt phẳng phức.

B) Hàm f(z) = $6z + e^{5z}$ có đạo hàm trên toàn mặt phẳng phức nên giải tích trên toàn mặt phẳng phức.

C) $\displaystyle\oint_{|z+4i|=2} \frac{6z + e^{5z}dz}{(z-1)^2} = 2\pi i(6+5e^5)$

D) $\displaystyle\oint_{|z-2i|=6} \frac{6z + e^{5z}dz}{(z-1)^2} = 2\pi i(6+5e^5)$

Câu 6 Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) khả vi tại điểm z = x_o+iy_o thì các hàm u(x,y) và v(x,y) thỏa điều kiện Cauchy – Reimann tại (x_o,y_o).

B) Nếu hàm v(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.

C) Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) liên tục tại điểm $z = x_o + iy_o$ thì các hàm u(x,y), v(x,y) cũng liên tục tại (x_o,y_o).

D) Nếu các hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên D.

Câu 7 Ảnh của đường thẳng $y = \frac{\pi}{8}$ qua phép biến hình $w = e^{-4z} = u + iv$ là

A) đường thẳng u = 0.
B) tia argw = -π/2.
C) tia argw = π/2.
D) đường thẳng v = 0.

Câu 8 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu khai triểm Laurent hàm f(z) quanh điểm bất thường cô lập a có dạng

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n \text{ thì } \operatorname{Res}[f(z), a] = a_{-1}$$

B) Hàm $f(z)=(z+i)\cos\frac{1}{z+i} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!}\frac{1}{(z+i)^{2n-1}}$ nên thặng dư $\operatorname{Res}\left[(z+i)\cos\frac{1}{z+i}, -i\right] = -\frac{1}{2}$.

C) $f(z) = z^3 e^{\frac{2}{z}} = z^3 + 2z^2 + 2z + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{z\ .4!} + \ldots$ và z = 0 là điểm bất thường cốt yếu của f(z).

D) $\oint_{|z-1|=3} z^3 e^{\frac{2}{z}} dz = \oint_{|z-1|=3} z^3 e^{\frac{2}{z}} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[z^3 e^{\frac{2}{z}}, 0\right] = \frac{4\pi}{3}$

Câu 9 Cho phương trình vi phân: $y' - 2y = u(t-\pi)e^{t-\pi}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 27.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: $pY - 2Y = \frac{e^{-\pi p}}{p-1} + 27$ (2)

Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : $Y = \frac{e^{-\pi p}}{(p-1)(p-2)} + \frac{27}{p-2}$ (3)

Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: $Y = e^{-\pi p}\left(\frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1}\right) + \frac{27}{p-2}$

Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: $y = \left(e^{2(t-\pi)} - e^{t-\pi}\right)u(t-\pi) + 27e^{2t}$

A) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.
B) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
C)Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
D) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 10 Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p), $\mathscr{L}$[g(t)] = G(p) và a, b là các hằng số. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}$[af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p)

B) $\mathscr{L}[2 + t^2 + sh3t] = \frac{2}{p} + \frac{2}{p^3} + \frac{p}{p^2-9}$

C) $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4}{(p+2)(p^2+4)}\right] = 2e^{-2t} * \sin 2t$

D) $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{p-2}{p^2-4p+40}\right] = e^{2t}\cos 6t$

PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

Câu 11 (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y'' - 6y' + 25y = e^{-3t} - e^{2t}, \text{ với } y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

Câu 12 (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x' + 3y = 2\sin t \\ x + y' + 2y = e^t \end{cases}, \text{ với điều kiện } x(0) = 0, \quad y(0) = 0$$

<u>Câu 13</u> (2 *điểm*)

a) Tìm ảnh của hàm gốc: $f(t) = u(t-\pi)\cos(t-\pi) + 5t^2 \sin t + \int_0^t e^{-2u} \cos 5u du$

b) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân: $y(t) = e^{5t} + 2\int_0^t y(u)\cos(t-u)du$

∗ **Ghi chú :** *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

Ngày 25 tháng 12 năm 2014

Bộ môn duyệt

<table>
<tr>
<td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM
BỘ MÔN TOÁN
MÔN THI: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE
Mã đề: 0010.0111-0001-0010-2014-0010
Giám thị 1: Giám thị 2:</td>
<td rowspan="2">Họ, tên sinh viên: ....
Mã số sinh viên:...............................
Số báo danh(STT):........ Phòng thi : ....
Ngày thi: 27/12/2014
Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.
Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td>
</tr>
<tr>
<td>Giáo viên chấm thi 1&2</td>
<td>ĐIỂM</td>
</tr>
</table>

BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Trả lời										

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

Mã môn học: 1001060 Thời gian : 75 phút(27/12/2014)
Đề thi gồm 3 trang Được phép sử dụng tài liệu
Mã đề: 0010.0111-0001-0010-2014-0011

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

(chọn 1 trong các câu: A, B, C, D)

Câu 1 Ảnh của đường thẳng y = $\frac{\pi}{8}$ qua phép biến hình w = e^{-4z} = u +iv là

A) đường thẳng u = 0.
B) tia argw = -π/2.
C) tia argw = π/2.
D) đường thẳng v = 0.

Câu 2 Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p), $\mathscr{L}$[g(t)] = G(p) và a, b là các hằng số. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}$[af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p)

B) $\mathscr{L}[2+t^2+sh3t]=\frac{2}{p}+\frac{2}{p^3}+\frac{p}{p^2-9}$

C) $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4}{(p+2)(p^2+4)}\right]=2e^{-2t}*\sin 2t$

D) $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{p-2}{p^2-4p+40}\right]=e^{2t}\cos 6t$

Câu 3 Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u=3x^2-3y^2-8y$, $v=6xy+8x$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u, v là các hàm điều hòa liên hợp
B) u điều hòa, v không điều hòa.
C) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.
D) v điều hòa, u không điều hòa

Câu 4 Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}$[f(t-a)u(t-a)] = e^{-ap}F(p)

B) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right]=\frac{F(p)}{p}$

C) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\frac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt}f(t)dt$

D) Nếu $f(t)=\begin{cases}0 & khi\quad 0<t<\pi\\ \sin 4t & khi\quad \pi<t<2\pi\end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{2\pi}e^{-pt}\sin 4t\,dt$

Câu 5 Tập hợp nghiệm của phương trình $z^3=8e^{6-i6\pi}$ là

A) $\{2e^2, e^2(-1+i\sqrt{3}), e^2(-1-i\sqrt{3})\}$ B) $\varnothing$ C) $\{2e^2, e^2(1+i\sqrt{3})\}$ D) $\{2e^2, 2e^2(1+i\sqrt{3}), 2e^2(1-i\sqrt{3})\}$

Câu 6 Khẳng định nào sau đây **sai**?

A) $(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm i\sin n\varphi$, ∀n∈Z.

B) Phương trình $e^z = 2015.e^{-\pi i}$ vô nghiệm.

C) Cho hai số phức khác 0 là $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$. Khi đó : $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1=r_2\\ \varphi_2=\varphi_1\pm 2k\pi\end{cases}$

D) $[r(\cos\varphi \mp i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi \mp i\sin n\varphi)$, ∀n∈Z.

Câu 7 Khẳng định nào sao đây sai?

A) Hàm f(z) có đạo hàm trên toàn mặt phẳng phức khi và chỉ khi f(z) giải tích trong toàn mặt phẳng phức.

B) Hàm f(z) = $6z+e^{5z}$ có đạo hàm trên toàn mặt phẳng phức nên giải tích trên toàn mặt phẳng phức.

C) $\oint\limits_{|z+4i|=2} \frac{6z+e^{5z}dz}{(z-1)^2} = 2\pi i(6+5e^5)$ D) $\oint\limits_{|z-2i|=6} \frac{6z+e^{5z}dz}{(z-1)^2} = 2\pi i(6+5e^5)$

Câu 8 Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) khả vi tại điểm $z = x_o+iy_o$ thì các hàm u(x,y) và v(x,y) thỏa điều kiện Cauchy – Reimann tại (x_o,y_o).

B) Nếu hàm v(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.

C) Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) liên tục tại điểm $z = x_o+iy_o$ thì các hàm u(x,y), v(x,y) cũng liên tục tại (x_o,y_o).

D) Nếu các hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên D.

Câu 9 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu khai triểm Laurent hàm f(z) quanh điểm bất thường cô lập a có dạng $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ thì $\mathrm{Res}[f(z),a] = a_{-1}$

B) Hàm f(z)=(z+i) $\cos\frac{1}{z+i} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!}\frac{1}{(z+i)^{2n-1}}$ nên thặng dư $\mathrm{Res}\left[(z+i)\cos\frac{1}{z+i}, -i\right] = -\frac{1}{2}.$

C) f(z) = $z^3 e^{\frac{2}{z}} = z^3 + 2z^2 + 2z + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{z\ .4!} + \ldots$ và z = 0 là điểm bất thường cốt yếu của f(z).

D) $\oint\limits_{|z-1|=3} z^3 e^{\frac{2}{z}} dz = \oint\limits_{|z-1|=3} z^3 e^{\frac{2}{z}} dz = 2\pi i\ \mathrm{Res}\left[z^3 e^{\frac{2}{z}}, 0\right] = \frac{4\pi}{3}$

Câu 10 Cho phương trình vi phân: y'-2y = u(t-π) $e^{t-\pi}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 27.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: pY-2Y = $\frac{e^{-\pi p}}{p-1} + 27$ (2)

Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\frac{e^{-\pi p}}{(p-1)(p-2)} + \frac{27}{p-2}$ (3)

Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $e^{-\pi p}\left(\frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1}\right) + \frac{27}{p-2}$

Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\left(e^{2(t-\pi)} - e^{t-\pi}\right)u(t-\pi) + 27e^{2t}$

A) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

B) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.

C) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.

D) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

Câu 11 (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y'' - 6y' + 25y = e^{-3t} - e^{2t}, \text{ với } y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

Câu 12 (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x' + 3y = 2\sin t \\ x + y' + 2y = e^t \end{cases}, \text{ với điều kiện } x(0) = 0, \quad y(0) = 0$$

Câu 13 (2 *điểm*)

a) Tìm ảnh của hàm gốc: $f(t) = u(t-\pi)\cos(t-\pi) + 5t^2 \sin t + \int_0^t e^{-2u}\cos 5u\,du$

b) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân: $y(t) = e^{5t} + 2\int_0^t y(u)\cos(t-u)\,du$

✻ Ghi chú : *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

Ngày 25 tháng 12 năm 2014

Bộ môn duyệt

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM
BỘ MÔN TOÁN
MÔN THI: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE
Mã đề: 0010.0111-0001-0010-2014-0011
Giám thị 1: Giám thị 2:</td><td rowspan="2">Họ, tên sinh viên: ....
Mã số sinh viên:...............................
Số báo danh(STT):........ Phòng thi : ....
Ngày thi: 27/12/2014
Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.
Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Trả lời										

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

Mã môn học: 1001060 Thời gian : 75 phút(27/12/2014)
Đề thi gồm 3 trang Được phép sử dụng tài liệu
Mã đề: 0010.0111-0001-0010-2014-0000

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

(chọn 1 trong các câu: A, B, C, D)

Câu 1 Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) khả vi tại điểm $z = x_o+iy_o$ thì các hàm u(x,y) và v(x,y) thỏa điều kiện Cauchy – Reimann tại (x_o,y_o).

B) Nếu hàm v(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.

C) Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) liên tục tại điểm $z = x_o+iy_o$ thì các hàm u(x,y), v(x,y) cũng liên tục tại (x_o,y_o).

D) Nếu các hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên D.

Câu 2 Ảnh của đường thẳng $y = \frac{\pi}{8}$ qua phép biến hình $w = e^{-4z} = u + iv$ là

A) đường thẳng u = 0.
B) tia argw = -π/2.
C) tia argw = π/2.
D) đường thẳng v = 0.

Câu 3 Cho phương trình vi phân: $y' - 2y = u(t-\pi)e^{t-\pi}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 27.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt $Y = Y(p) = \mathscr{L}[y(t)]$

Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: $pY - 2Y = \dfrac{e^{-\pi p}}{p-1} + 27$ (2)

Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : $Y = \dfrac{e^{-\pi p}}{(p-1)(p-2)} + \dfrac{27}{p-2}$ (3)

Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: $Y = e^{-\pi p}\left(\dfrac{1}{p-2} - \dfrac{1}{p-1}\right) + \dfrac{27}{p-2}$

Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: $y = \left(e^{2(t-\pi)} - e^{t-\pi}\right)u(t-\pi) + 27e^{2t}$

A) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.
B) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
C)Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
D) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 4 Giả sử $\mathscr{L}[f(t)] = F(p)$, $\mathscr{L}[g(t)] = G(p)$ và a, b là các hằng số. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}[af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p)$

B) $\mathscr{L}[2 + t^2 + sh3t] = \dfrac{2}{p} + \dfrac{2}{p^3} + \dfrac{p}{p^2-9}$

C) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{4}{(p+2)(p^2+4)}\right] = 2e^{-2t} * \sin 2t$

D) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{p-2}{p^2-4p+40}\right] = e^{2t}\cos 6t$

Câu 5 Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u = 3x^2 - 3y^2 - 8y$, $v = 6xy + 8x$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u, v là các hàm điều hòa liên hợp
B) u điều hòa, v không điều hòa.
C) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.
D) v điều hòa, u không điều hòa

Câu 6 Giả sử $\mathscr{L}[f(t)] = F(p)$. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}[f(t-a)u(t-a)] = e^{-ap}F(p)$

B) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \dfrac{F(p)}{p}$

C) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}[f(t)] = \dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

D) Nếu $f(t)=\begin{cases} 0 & khi \quad 0<t<\pi \\ \sin 4t & khi \quad \pi<t<2\pi \end{cases}$ và $f(t+2\pi) = f(t)$ thì $\mathscr{L}[f(t)] = \dfrac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{2\pi} e^{-pt}\sin 4t dt$

Câu 7 Tập hợp nghiệm của phương trình $z^3 = 8e^{6-i6\pi}$ là

A) $\left\{2e^2, e^2(-1+i\sqrt{3}), e^2(-1-i\sqrt{3})\right\}$ B) $\varnothing$ C) $\left\{2e^2, e^2(1+i\sqrt{3})\right\}$ D) $\left\{2e^2, 2e^2(1+i\sqrt{3}), 2e^2(1-i\sqrt{3})\right\}$

Câu 8 Khẳng định nào sau đây **sai**?

A) $(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm i\sin n\varphi$, $\forall n\in Z$.

B) Phương trình $e^z = 2015.e^{-\pi i}$ vô nghiệm.

C) Cho hai số phức khác 0 là $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Khi đó : $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_2 = \varphi_1 \pm 2k\pi \end{cases}$

D) $[r(\cos\varphi \mp i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi \mp i\sin n\varphi)$, $\forall n\in Z$.

Câu 9 Khẳng định nào sao đây sai?

A) Hàm f(z) có đạo hàm trên toàn mặt phẳng phức khi và chỉ khi f(z) giải tích trong toàn mặt phẳng phức.

B) Hàm f(z) = $6z + e^{5z}$ có đạo hàm trên toàn mặt phẳng phức nên giải tích trên toàn mặt phẳng phức.

C) $\oint\limits_{|z+4i|=2} \dfrac{6z + e^{5z}dz}{(z-1)^2} = 2\pi i(6+5e^5)$

D) $\oint\limits_{|z-2i|=6} \dfrac{6z + e^{5z}dz}{(z-1)^2} = 2\pi i(6+5e^5)$

Câu 10 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu khai triểm Laurent hàm f(z) quanh điểm bất thường cô lập a có dạng $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ thì $\mathrm{Res}[f(z),a] = a_{-1}$

B) Hàm $f(z)=(z+i)\cos\dfrac{1}{z+i} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n)!}\dfrac{1}{(z+i)^{2n-1}}$ nên thặng dư $\mathrm{Res}\left[(z+i)\cos\dfrac{1}{z+i}, -i\right] = -\dfrac{1}{2}$.

C) $f(z) = z^3 e^{\frac{2}{z}} = z^3 + 2z^2 + 2z + \dfrac{2^3}{3!} + \dfrac{2^4}{z\ .4!} + \dots$ và z = 0 là điểm bất thường cốt yếu của f(z).

D) $\oint\limits_{|z-1|=3} z^3 e^{\frac{2}{z}}dz = \oint\limits_{|z-1|=3} z^3 e^{\frac{2}{z}}dz = 2\pi i\ \mathrm{Res}\left[z^3 e^{\frac{2}{z}}, 0\right] = \dfrac{4\pi}{3}$

PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

Câu 11 (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y'' - 6y' + 25y = e^{-3t} - e^{2t}, \text{ với } y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

Câu 12 (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x' + 3y = 2\sin t \\ x + y' + 2y = e^t \end{cases}, \text{ với điều kiện } x(0) = 0, \quad y(0) = 0$$

__Câu 13__ (2 *điểm*)

a) Tìm ảnh của hàm gốc: $f(t) = u(t-\pi)\cos(t-\pi) + 5t^2 \sin t + \int_0^t e^{-2u} \cos 5u du$

b) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân: $y(t) = e^{5t} + 2\int_0^t y(u)\cos(t-u)du$

∗ Ghi chú : *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

Ngày 25 tháng 12 năm 2014

Bộ môn duyệt

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM
BỘ MÔN TOÁN
MÔN THI: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE
Mã đề: 0010.0111-0001-0010-2014-0000
Giám thị 1: Giám thị 2:</td><td rowspan="2">Họ, tên sinh viên: ....
Mã số sinh viên:...............................
Số báo danh(STT):........ Phòng thi : ....
Ngày thi: 27/12/2014
Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.
Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Trả lời										

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

ĐÁP ÁN MÔN

HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

(Ngày thi: **27**/12/2014)

PHẦN TRẮC NGHIỆM

Mã đề: 0010.0111-0001-0010-2014-0000

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời	D	B	C	B	A	D	A	B	C	D

Mã đề: 0010.0111-0001-0010-2014-001

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời	A	B	C	D	B	D	C	A	D	B

Mã đề: 0010.0111-0001-0010-2014-0010

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời	A	D	A	B	C	D	B	D	C	B

Mã đề: 0010.0111-0001-0010-2014-0011

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời	B	B	A	D	A	B	C	D	D	C

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Câu hỏi	Nội dung	*Điểm*
Câu 11		*1,5đ*
	Đặt $Y=Y(p) = \mathscr{L}[y(t)]$. Biến đổi Laplace hai vế phương trình, áp dụng tính chất tuyến tính và tính chất đạo hàm hàm gốc ta được: $p^2Y - py(0) - y'(0) - 6(pY - y(0)) + 25Y = \mathscr{L}\left[e^{-3t} - e^{2t}\right]$ $\Leftrightarrow Y(p^2 - 6p + 25) = \frac{1}{p+3} - \frac{1}{p-2}$	*0.5đ*
	$\Leftrightarrow Y = \frac{-5}{(p-2)(p+3)[(p-3)^2+16]} = \frac{A}{p-2} + \frac{B}{p+3} + \frac{C(p-3)+4D}{(p-3)^2+16}$	*0.5đ*
	Biếi đổi Laplace ngược hai vế và áp dụng tính chất tuyến tính ta được $y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y] = \mathscr{L}^{-1}[A\frac{1}{p-2} + B\frac{1}{p+3} + C\frac{p-3}{(p-3)^2+16} + D\frac{4}{(p-3)^2+16}]$ $\Leftrightarrow y(t) = Ae^{2t} + Be^{-3t} + Ce^{3t}\cos 4t + De^{3t}\sin 4t + 3e^{3t}\sin 4t$ Tìm A,B,C,D dựa vào đẳng thức: $\frac{-5}{(p-2)(p+3)[(p-3)^2+16]} \overset{(*)}{=} \frac{A}{p-2} + \frac{B}{p+3} + \frac{C(p-3)+4D}{(p-3)^2+16}$ $A = \frac{-5}{(2+3)[(2-3)^2+16]} = \frac{-1}{17}$, $B = \frac{-5}{(-3-2)[(-3-3)^2+16]} = \frac{1}{52}$ Từ (*) cho $p=0$ được: $\frac{5}{6\times 25} = \frac{A}{-2} + \frac{B}{3} + \frac{-3C+4D}{25}$ Từ (*) cho $p=3$ được: $\frac{-5}{96} = A + \frac{B}{6} + \frac{D}{4}$.	*0.5đ*

Suy ra $C=\dfrac{35}{884}$, $D=\dfrac{25}{1768}$

Câu 12 **1.5đ**

Đặt $X=\mathscr{L}[x], Y=\mathscr{L}[y]$; biến đổi Laplace hai vế ta được:

$$\begin{cases}\mathscr{L}[x']+3\mathscr{L}[y]=2\mathscr{L}[\sin t]\\ \mathscr{L}[x]+\mathscr{L}[y']+2\mathscr{L}[y]=\mathscr{L}[e^t]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}pX+3Y=\dfrac{2}{p^2+1}\\ X+(p+2)Y=\dfrac{1}{p-1}\end{cases}$$

0.5đ

$$\Leftrightarrow\begin{cases}X=\dfrac{-p^2+2p-7}{(p-1)^2(p+3)(p^2+1)}=\dfrac{A(p-1)+B}{(p-1)^2}+\dfrac{C}{p+3}+\dfrac{Dp+E}{p^2+1}\\ Y=\dfrac{p^3-p+2}{(p-1)^2(p+3)(p^2+1)}=\dfrac{A'(p-1)+B'}{(p-1)^2}+\dfrac{C'}{p+3}+\dfrac{D'p+E'}{p^2+1}\end{cases}$$

Biến đổi ngược hai vế ta được:

0.5đ

$$\begin{cases}x=\mathscr{L}^{-1}[X]\\ y=\mathscr{L}^{-1}[Y]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\mathscr{L}^{-1}[A\dfrac{1}{p-1}+B\dfrac{1}{(p-1)^2}+C\dfrac{1}{p+3}+D\dfrac{p}{p^2+1}+E\dfrac{1}{p^2+1}]\\ y=\mathscr{L}^{-1}[A'\dfrac{1}{p-1}+B'\dfrac{1}{(p-1)^2}+C'\dfrac{1}{p+3}+D'\dfrac{p}{p^2+1}+E'\dfrac{1}{p^2+1}]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=Ae^t+Bte^t+Ce^{-3t}+D\cos t+E\sin t\\ y=A'e^t+B'te^t+C'e^{-3t}+D'\cos t+E'\sin t\end{cases}$$

- Tìm A,B,C,D,E dựa vào

0.5đ

$$\frac{-p^2+2p-7}{(p-1)^2(p+3)(p^2+1)}=\frac{A(p-1)+B}{(p-1)^2}+\frac{C}{p+3}+\frac{Dp+E}{p^2+1}$$

$$B=\frac{-1^2+2\times1-7}{(1+3)(1^2+1)}=\frac{-3}{4},\quad C=\frac{-(-3)^2+2\times3-7}{(-3-1)^2(9+1)}=-\frac{1}{16}$$

$$\begin{cases}Cho\ p=0 &: \dfrac{-7}{3}=-A+B+\dfrac{C}{3}+E\\ Cho\ p=2 &: \dfrac{-7}{25}=A+B+\dfrac{C}{5}+\dfrac{2D+E}{5}\\ Cho\ p=-2 &: \dfrac{-1}{3}=\dfrac{-3A+B}{9}+C+\dfrac{E-2D}{5}\end{cases}$$

Thay $B=\dfrac{-3}{4}$, $C=-\dfrac{1}{16}$ vào hệ trên và sử dụng máy tính casio giải được $A=\dfrac{69}{80}$, $D=\dfrac{-3}{5}$, $E=\dfrac{-7}{10}$

- Tương tự, chúng ta tìm A',B',C',D',E' dựa vào

$$\frac{p^3-p+2}{(p-1)^2(p+3)(p^2+1)}=\frac{A'(p-1)+B'}{(p-1)^2}+\frac{C'}{p+3}+\frac{D'p+E'}{p^2+1}$$

$$B'=\frac{1^3-1+2}{(1+3)(1^2+1)}=\frac{1}{4},\quad C'=\frac{(-3)^3-(-3)+2}{(-3-1)((-3)^2+1)}=\frac{11}{20}$$

	$\begin{cases} Cho\ p=0 \ : \ \frac{2}{3} = -A'+B'+\frac{C'}{3}+E' \\ Cho\ p=2 \ : \ \frac{8}{25} = A'+B'+\frac{C'}{5}+\frac{2D'+E'}{5} \\ Cho\ p=-2 \ : \ \frac{-4}{45} = \frac{-3A'+B'}{9}+C'+\frac{E'-2D'}{5} \end{cases}$ Thay $B' = \frac{1}{4}$, $C' = \frac{11}{20}$ vào hệ trên và sử dụng máy tính casio giải được $A' =$, $D' =$, $E' =$	
Câu 13		***1đ***
	a) $\mathscr{L}[f(t)] = e^{-p\pi}\ \frac{p}{p^2+1} + 5\left(\frac{2p}{(p^2+1)^2}\right)' + \frac{1}{p}.\ \mathscr{L}[e^{-2t}\cos 5t]$ $= e^{-p\pi}\ \frac{p}{p^2+1} + 10\frac{1-3p^2}{(p^2+1)^3} + \frac{1}{p}.\frac{p+2}{(p+2)^2+25}$	***0.5đ*** ***0.5đ***
	b) Áp dụng tích chập, phương trình được viết lại $y(t) = e^{5t} + 2y(t) * \cos t$ Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$[y(t)] biến đổi Laplace hai vế phương trình, áp dụng tính chất tuyến tính và định lý Borel ta được $Y = \frac{1}{p-5} + 2\mathscr{L}[y(t)]\ \mathscr{L}[\cos t] \Leftrightarrow Y = \frac{1}{p-5} + 2Y\frac{p}{p^2+1}$ Giải phương trình với Y là ẩn ta được $Y = \frac{p^2+1}{(p-5)(p-1)^2} = \frac{A}{p-5} + \frac{B(p-1)+C}{(p-1)^2}$ Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm $y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y] = \mathscr{L}^{-1}[\frac{A}{p-5} + B\frac{1}{p-1} + C\frac{1}{(p-1)^2}]$ $\Leftrightarrow y(t) = Ae^{5t} + Be^{t} + Cte^{t}$ Tìm A, B, C dựa vào đẳng thức $\frac{p^2+1}{(p-5)(p-1)^2} = \frac{A}{p-5} + \frac{B(p-1)+C}{(p-1)^2}$ $A = \frac{13}{8},\ C = \frac{-1}{2},\ B = \frac{-5}{8}$	***0.5đ*** ***0.5đ***